Licence 3-ième année **10 mars 2015**
2014–2015

Controle Continu de Géométrie

Durée ? ? minutes

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Exercice 1 Dans tout l'exercice on utilisera la notation suivante : Pour des points A_i et des scalaires a_i, on écrira $A = a_1A_1 + \cdots + a_mA_m$ pour désigner le barycentre des A_i affectés des poids a_i.
Soient A, B, C trois points non-alignés d'un plan affine réel E.

1. Soit D (respectivement E, F) le milieu du segment $[BC]$ (respectivement $[AC]$, $[AB]$). On appelle (AD), (BE) et (CF) les *médianes* du triangle ABC.
   (a) Donner les coordonées barycentriques de D par rapport au repère A, B et C.
   (b) On pose $O_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}D$. Écrire O_1 comme un barycentre de A, B et C.
   (c) Faire la même chose pour $O_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}E$ et $O_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}F$.
   (d) Conclure que les trois médianes sont concourantes et donner les coordonnées barycentriques par rapport au repère A, B et C du point d'intersection. Faire un dessin.
2. **(Théorème de Ceva [1])** Soit D (respectivement E, F) un point du segment $[BC]$ (réspectivement $[AC]$, $[AB]$). On suppose toujours que D, E, F ne coïncident pas avec A, B ou C. On suppose la condition suivante
$$(*) \qquad \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = 1.$$
   Le but de cet exercice est de montrer que (AD), (BE) et (CF) sont concourants si et seulement si la condition $(*)$ est satisfaite.
   On note les nombres réels $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}$ et $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{FA}}$ (rappel : ceci veut dire que $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BF} = \mu\overrightarrow{FA}$).
   (a) Calculer $\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}$ sous la condition $(*)$.
   (b) Exprimer D, E et F comme un barycentre de A, B et C.
   (c) On pose $O \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu A + B + \lambda C}{\lambda + \mu + 1}$. Montrer que $\{A, O, D\}; \{B, O, E\}; \{C, O, F\}$ sont des triplets des points alignés.
   (d) Conclure que sous la condition $(*)$, (AD), (BE) et (CF) sont concourants. Faire un dessin.
   (e) Si $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$, calculer le rapport $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}$.
   (f) Montrer la réciproque du théorème de Ceva : si (AD), (BE) et (CF) sont concourants, alors $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = 1$.
   (g) $(\star)$ Le théorème de Ceva est-il encore vrai si D, E et F sont sur les droites (BC), (AC), (AB), au lieu des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ réspectivement ? Que se passe-t-il pour (CF) si (AD) et (BE) sont parallèles ?

---

1. Giovanni Ceva: De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio, 1678.

Exercice 2 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ deux sous-espaces affines non-vides de $\mathcal{E}$, dont on note E_1 et E_2 les directions.
On dira que $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont faiblement parallèles si $E_1 \subseteq E_2$ ou $E_2 \subseteq E_1$.

1. Questions de cours : Montrer que si $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ est non-vide alors c'est un sous-espace affine dont on déterminera la direction.
2. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension 3.
   On suppose que $\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 \geq \dim \mathcal{E}$.
   Montrer que $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ s'intersectent ou qu'ils sont faiblement parallèles.
3. Montrer que l'implication précédente est fausse si $\dim \mathcal{E} = 4$.